TD 3 de mécanique - PHY121
Dynamique du point matériel "avec cinématique".

Thèmes abordés : lois de Newton, forces.
Concepts clés : force, système, point matériel, mouvement inertiel, référentiel d'inertie, position, vitesse, accélération, coordonnées, ...
Objectifs du TD : savoir utiliser les lois de Newton dans des problèmes de dynamique nécessitant une analyse détaillée du mouvement et faisant intervenir des équations différentielles. Un peu de dynamique non-galiléenne.
Mathématiques utilisées : vecteurs, projection d'un vecteur ou d'une équation vectorielle, résolution d'une équation vectorielle, trigonométrie, coordonnées polaires, équations différentielles à coefficients constants.

3.1** *Exercice de tronc commun*
Un grand classique : le pendule simple
Un pendule, constitué d'une boule de masse m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, est suspendu à un point fixe O. On met le pendule en mouvement, par exemple en l'écartant d'un angle θ_0 par rapport à la verticale, le fil étant tendu, puis en le lâchant sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements.
L'objectif est de faire le tour du problème, lequel a de nombreuses applications :

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la boule.

Cette équation différentielle générale n'a pas de solution analytique en termes d'équations du mouvement (expression des coordonnées en fonction du temps), c'est à dire que l'on ne sait pas la résoudre avec un crayon et un papier, sauf dans le cas de "l'approximation des petites oscillations". Hormis quelques cas particuliers, seuls des calculs approchés (effectués par ordinateur) permettent de s'en sortir.

b- Résoudre l'équation différentielle dans le cas de "l'approximation des petites oscillations", et en déduire dans ce cas l'équation temporelle du mouvement.

c- Il est cependant possible de calculer analytiquement la vitesse en fonction de la position de la boule, **dans le cas général**.

d- L'expression de la vitesse permet de connaître la tension du fil en fonction de la position de la boule.

I- *Résolution du problème général.*
A- Pour ceux qui veulent se débrouiller tous seuls : traiter les différentes étapes citées ci-dessus.

B- Résolution guidée :
Soit un repère R(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), O étant le point où est fixé le fil du pendule, Ox, l'axe vertical dirigé vers le bas, et Oy l'axe horizontal vers la droite. Soit θ, l'angle polaire entre Ox et le fil du pendule, compté positivement dans le sens direct.

a- Equation différentielle du mouvement.

1- Que peut on dire sur le mouvement de la boule? En déduire l'expression des vecteurs position, vitesse, et accélération en fonction de θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et L.

2- Transcrire les conditions initiales pour θ et $\dot{\theta}$.

3- Faire le bilan des forces extérieures exercées sur la boule.

4- Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique.
Projeter l'équation vectorielle obtenue dans les directions de $\vec{u}_r$ et de $\vec{u}_\theta$.

5- En déduire l'équation différentielle du mouvement.

b- Approximation des petites oscillations. Réécrire l'équation différentielle en faisant l'hypothèse que θ reste suffisamment petit pour que $\sin\theta \sim \theta$. Résoudre cette nouvelle équation différentielle : établir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$. Cette solution est-elle cohérente avec l'approximation des petites oscillations?

c- Vitesse en fonction de la position. Reprendre l'équation différentielle (a-5) du mouvement sans faire d'approximation, et l'écrire non en fonction de θ mais de ω, où $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, sous la forme $d\omega/dt = f(\theta)$. Après avoir démontré que $d\omega/dt = \omega\, d\omega/d\theta$, écrire l'équation sous la forme $d\omega = f(\theta)\, d\theta$, puis intégrer membre à membre. En déduire l'expression finale de $\omega(\theta)$.

d- Tension. Reprendre l'équation obtenue par la projection du PFD suivant $\vec{u}_r$, et en déduire l'expression du module de la force de tension du fil en fonction de θ.

II- Application.
Un enfant un peu trop grand se balance de bon cœur sur une balançoire dont les cordes sont usées. En quel point de la trajectoire le risque de rupture des cordes est-le plus grand ?

Remarque générale : On peut établir l'équation différentielle du pendule simple non seulement par la dynamique (Principe fondamental de la dynamique), mais également par la conservation de l'énergie mécanique ou encore via *le théorème du moment cinétique. En fait, ces deux dernières méthodes découlent du PFD lorsque l'on se limite à la Mécanique du Point Matériel : elles permettent d'éclairer le même principe sous des jours différents (description énergétique ou bien point de vue de la rotation autour d'un point fixe) bien qu'ils soient plus restrictifs (l'aspect énergétique ne permet pas de calculer la tension de corde par exemple). Dans ce TD, c'est bien sûr l'aspect dynamique qui nous intéresse, et qui nous permet de traiter le problème de manière assez complète.*

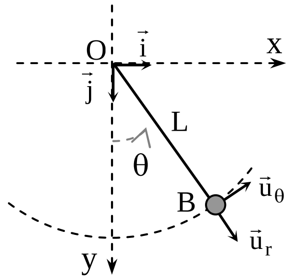
I- Résolution du problème général.

a- *Equation différentielle du mouvement.*

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Système : La boule B de masse m constante.

Repère : $R(O, \vec{i}, \vec{j})$



Remarques sur le mouvement : tant que la corde est tendue, le mouvement de la boule est circulaire de rayon L (longueur de la corde) et de centre O (point d'attache du pendule) : il est donc commode de choisir un repère centré en O, et des coordonnées polaires. L'expérience montre que si l'on écarte le pendule d'un angle θ par rapport à la verticale, le pendule oscille autour de la verticale. Il est donc assez naturel et commode de choisir l'axe Ox vertical vers le bas; l'axe Oy sera donc choisi horizontal vers la droite pour garder le repère direct.

Mouvement du centre d'inertie de B :

$\overrightarrow{OB} = L\,\vec{u}_r$ *mouvement circulaire de centre O, rayon L*

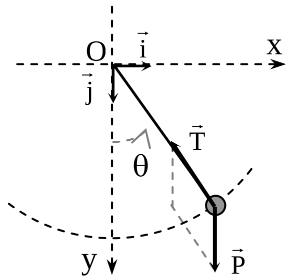
$$\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + L\,\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = L\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + L\,\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - L\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$$

(Rappel : $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$ *)*

La seule inconnue du mouvement est θ (et ses dérivées temporelles).

Forces extérieures :



Forces à distance : Poids de la boule $\vec{P} = m\,g_0\,\vec{i} = m\,g_0\,(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$

Forces de contact : Tension du fil $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\,\vec{u}_r$

On néglige tout frottement

La seule inconnue du point de vue forces, est la norme de la tension $\|\vec{T}\|$.

PFD : dans un repère galiléen et pour un système de masse constante il s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext.\,au\,syst.} = m_{syst.}\,\vec{\gamma}_{syst.}$$

Avec ce que nous avons écrit précédemment :

$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{\gamma}_B$ *c'est à dire :* $m\,g_0\,(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) - \|\vec{T}\|\,\vec{u}_r = m\,L\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - m\,L\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$

Projection // à $\vec{u}_r$ *:* $m\,g_0\cos\theta - \|\vec{T}\| = -m\,L\,\dot{\theta}^2$ *(1)*

Projection // à $\vec{u}_\theta$ *:* $-m\,g_0\sin\theta = m\,L\,\ddot{\theta}$ *(2)*

L'équation (2) ne dépend que de θ, c'est l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{g_0}{L}\sin\theta = 0$

Remarque

Cette équation différentielle générale n'a pas de solution analytique en termes d'équations du mouvement (expression des coordonnées en fonction du temps), c'est à dire que l'on ne sait pas la résoudre avec un crayon et un papier, sauf dans le cas de "l'approximation des petites oscillations". Hormis quelques cas particuliers, seuls des calculs approchés (effectués par ordinateur de nos jours) permettent de s'en sortir.

b- *Approximation des petites oscillations.*

On fait l'hypothèse que θ est toujours suffisamment petit pour que $\sin\theta \sim \theta$ (développement limité à l'ordre 1).

L'équation différentielle du mouvement devient : $\ddot{\theta} + \dfrac{g_0}{L}\theta = 0$

Résolution :

Soit la constante positive $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g_0}{L}}$ *. L'équation s'écrit* $\ddot{\theta} + \omega_0{}^2\ \theta = 0$.

Solution générale (i.e. l'ensemble de toutes les solutions possibles) : $\theta(t)= A\cos(\omega_0\, t+\phi)$
où A et f sont des constantes d'intégration.
(Elle s'écrit également sous d'autres formes équivalentes, telle que $B\cos(\omega_0\, t) + C\sin(\omega_0\, t)$*. Exercice : le démontrer en trouvant les relations entre (A,* ϕ*) et (B,C)).*

Solution (de ce problème particulier)
Les conditions initiales, en donnant la valeur de θ *et de la norme de la vitesse à l'instant initial t=0, caractérisent le problème particulier qui nous intéresse : elles permettent de déterminer* ***la*** *solution, donc la valeur de chacune des deux constantes d'intégration.*

Conditions initiales : On écarte le pendule d'un angle θ_0 *par rapport à la verticale, le fil étant tendu, et on le lâche sans vitesse initiale.*

Traduction : $\theta(t=0)= \theta_0$ *et* $\vec{v}_B(t=0) = \vec{0}$

L'équation du mouvement ne dépend que de $\theta(t)$*, il nous faut donc traduire la condition de vitesse :*

Or nous avons écrit précédemment : $\vec{v}_B = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ *d'où :* $\dot{\theta}(t=0) = 0$

Calcul de $\dot{\theta}(t)$ *:* $\dot{\theta}(t) = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(A\cos(\omega_0\, t+\phi))}{dt} = -A\,\omega_0\,\sin(\omega_0\, t+\phi)$

Les conditions initiales s'écrivent donc :

$\theta(t=0)= A\cos(\phi) = \theta_0$ *(1)*

$\dot{\theta}(t=0) = -A\,\omega_0\,\sin(\phi) = 0$ *(2)*

(2) donne : A n'est pas nul car sinon $\theta(t)=0\ \forall t$*, il n'y a donc pas de mouvement*
donc $\sin(\phi) = 0$ *:* $\phi = 0$ *(ou* $\phi = \pi$ *: nous verrons que les deux solutions sont équivalentes)*
(1) donne alors $A = \theta_0$

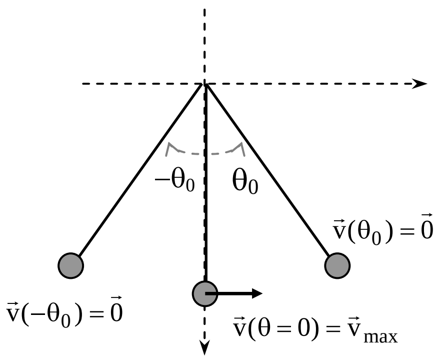
La solution s'écrit : $\theta(t)= \theta_0\cos(\omega_0\, t)$

Exercice : choisir la solution $\phi = \pi$*, calculer la valeur correspondante de A, et montrer que la solution obtenue est strictement équivalente à celle ci-dessus.*

Analyse du résultat

- *le mouvement est harmonique (c'est à dire de rythme sinusoïdal), de période* $T=2\pi/\omega_0$ *.*
- *l'angle* θ *ne dépasse jamais la valeur* θ_0 *. L'approximation des petites oscillations sera donc valable si* θ_0 *est petit : tel que* $|(\sin\theta_0 - \theta_0)/\theta_0| < \varepsilon$*, si l'on travaille avec une précision relative de* ε *%. Par exemple, si l'on travaille avec une précision de 4-5% , l'approximation sera valable jusqu'à des angles d'environ 30°.*

- *La vitesse angulaire* $\dot{\theta}(t) = -\theta_0\,\omega_0\,\sin(\omega_0\, t)$ *est maximale lorsque le sinus est maximal, donc le cosinus minimal, c'est à dire en* θ *=0, la position basse du pendule. Inversement, la vitesse angulaire est nulle (minimale) lorsque* θ *est maximal, c'est à dire en* $\theta = \theta_0$*.*
On peut dire la même chose du module de la vitesse puisque comme on l'a montré, $\|\vec{v}_B\| = L|\dot{\theta}|$.



c- *Vitesse en fonction de la position.*

On ne fait plus d'approximations, on reprend donc l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \dfrac{g_0}{L}\sin\theta = 0$

On a montré que l'expression de la valeur algébrique de la vitesse est : $\bar{v}_B = L\dot{\theta}$.

D'où $\dot{\theta} = \dfrac{\bar{v}_B}{L}$ *et par conséquent* $\ddot{\theta} = \dfrac{1}{L}\dfrac{d\bar{v}_B}{dt} = \dfrac{1}{L}\dfrac{d\bar{v}_B}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\dot{\theta}}{L}\dfrac{d\bar{v}_B}{d\theta} = \dfrac{\bar{v}_B}{L^2}\dfrac{d\bar{v}_B}{d\theta}$

En reportant dans l'équation différentielle : $\bar{v}_B \dfrac{d\bar{v}_B}{d\theta} + g_0 \, L \sin\theta = 0$

On sépare les termes en $\bar{v}_B$ *et les termes en* θ *:* $\bar{v}_B \, d\bar{v}_B = -g_0 \, L \, \sin\theta \, d\theta$

Puis on intègre membre à membre : $\int \bar{v}_B \, d\bar{v}_B = -g_0 \, L \int \sin\theta \, d\theta$

Ce qui donne : $\frac{1}{2}\,\bar{v}_B^{\,2} = g_0 \, L \, \cos\theta + C$, *où C est une constante d'intégration que l'on détermine par les conditions initiales :* $\theta(t=0) = \theta_0$ *et* $\bar{v}_B(t=0) = 0$ *d'où* $\bar{v}_B(\theta_0) = 0$

Donc $0 = g_0 \, L \, \cos\theta_0 + C$. *On trouve* $C = -g_0 \, L \cos\theta_0$.

Alors $|\bar{v}_B(\theta)| = \sqrt{2 g_0 \, L \, (\cos\theta - \cos\theta_0)} = \|\vec{v}_B(\theta)\|$

<u>Analyse du résultat</u>.

- La vitesse est nulle pour $\theta = \theta_0$ *et maximale en* $\theta = 0$ *:* $\bar{v}_B(0) = \sqrt{2 g_0 \, L \, (1 - \cos\theta_0)}$

- Les conditions initiales posées ici ne permettent pas d'examiner le cas où le pendule "fait le tour", car il ne suffit pas de le lâcher d'une position θ_0*, il faut le lancer avec une vitesse initiale non-nulle.*

Exercice : établir l'expression du module de la vitesse en fonction de la position θ*, à partir de nouvelles conditions initiales* $\|\vec{v}_B(\theta_0)\| = v_0$. *Quelle vitesse minimale faut-il donner en* $\theta=0$*, pour que B "fasse le tour".*

d- *<u>Tension</u>.*

On se place hors approximations. On avait écrit l'équation (1) qui fait intervenir la tension du fil :

$$m \, g_0 \cos\theta - \|\vec{T}\| = -m \, L \, \dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

Nous avons montré précédemment (au c-), que $\dot{\theta} = \dfrac{\bar{v}_B}{L}$ *et que* $|\bar{v}_B(\theta)| = \sqrt{2 g_0 \, L \, (\cos\theta - \cos\theta_0)}$

D'où : $\|\vec{T}\| = m \, L \left(\dfrac{\bar{v}_B}{L}\right)^2 + m \, g_0 \cos\theta = \dfrac{2m}{L} g_0 \, L \, (\cos\theta - \cos\theta_0) + m \, g_0 \cos\theta$

On trouve donc : $\|\vec{T}\| = m \, g_0 \, (3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$

<u>Analyse</u>.

La tension du fil n'est jamais nulle, elle est maximale au point bas $\theta = 0$ *et minimale au point le plus haut* $\theta = \theta_0$ *:*

- Pour $\theta = 0$ *:* $\|\vec{T}\| = m \, g_0 \, (3 - 2\cos\theta_0)$

- Pour $\theta = \theta_0$ *:* $\|\vec{T}\| = m \, g_0 \cos\theta_0$

Exercice : examiner la tension du fil lorsque le pendule "fait le tour".

II- Application.

<u>Analyse du problème</u> : le risque de rupture est le plus grand, là où la tension de la corde est la plus grande.

<u>Résolution</u> : on assimile la balançoire à un pendule simple et on reprend les résultats obtenus au I-d-.

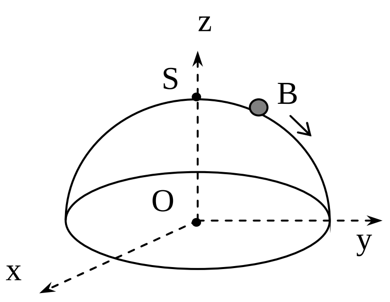
<u>Analyse des résultats</u>: la tension de corde est la plus importante au point bas de la trajectoire . En ce point la vitesse (voir I-c-) est horizontale et de module maximal : l'enfant va partir en "vol plané", avec une vitesse initiale importante; si la hauteur de la balançoire est relativement importante, les dégâts risquent d'être importants.

Par contre, si la chute avait lieu au point le plus haut ($\theta = \theta_0$)*, ce qui est le cas le moins probable en matière de rupture de corde, la vitesse de l'enfant serait nulle : l'enfant ne ferait que tomber sur ses fesses ou sur ses pieds, de la hauteur de la balançoire en* $\theta = \theta_0$.

<u>Conclusion</u> : si les cordes sont usées, ça vaut la peine de les changer.

3.2** Un gamin laisse glisser une bille B de masse m, du sommet S d'une butte en forme de demi-sphère de centre O et de rayon R. On supposera les frottements négligeables.

1- Calculer la vitesse de la bille en fonction de l'angle



$\theta = \widehat{SOB}$, au dessus du sol (en haut de la demi-sphère, $\theta_{min}=0$).

2- Pour quelle valeur de θ la bille décolle t'elle de la demi-sphère? (écrire la condition de décollage).

Remarque : cet exercice est similaire à l'exercice 3.1

1-

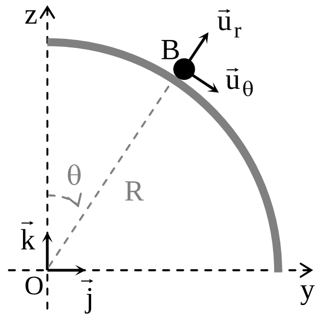
Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : bille B supposée ponctuelle, de masse m

Repère : $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Mouvement : circulaire *de rayon R et de centre O , dans le plan vertical yOz (tant que la bille reste en contact avec la butte).*

Système de coordonnées : coordonnées polaires B(R,θ) dans le plan zOy.

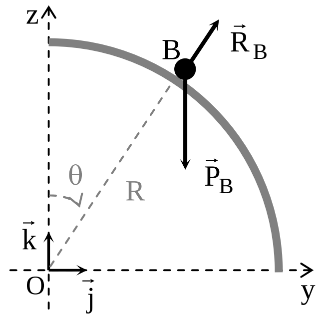


ATTENTION : $(\vec{k},\vec{j})$ *et* $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ *ne sont pas directes. Cependant* $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ *est le vecteur unitaire obtenu par rotation de* $+\frac{\pi}{2}$ *dans le sens positif de θ. θ tournant dans le sens indirect, on a bien* $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$.

* $\overrightarrow{OB} = R\,\vec{u}_r$

* $\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

* $\vec{\gamma}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$ *(car* $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$ *)*



Forces :

* *à distance : poids de B* $\vec{P}_B = -m\,g_0\,\vec{k} = -m\,g_0\left(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right)$

* *de contact : réaction normale de la butte* $\vec{R}_B = \left\|\vec{R}_B\right\|\vec{u}_r$

frottements avec la butte ou l'air : négligeables

PFD : $\vec{P}_B + \vec{R}_B = m\,\vec{\gamma}_B$

projection $//\vec{u}_r$ *:* $-m\,g_0\cos\theta + \left\|\vec{R}_B\right\| = -m\,R\,\dot{\theta}^2$

projection $//\vec{u}_\theta$ *:* $m\,g_0\sin\theta = m\,R\,\ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} - \frac{g_0}{R}\sin\theta = 0$

Elle ressemble un peu à celle du pendule simple. Il n'est pas possible de la résoudre analytiquement. Ici cependant, il ne semble pas raisonnable de faire l'approximation des petites oscillations, car θ semble pouvoir devenir assez grand. Par contre on a vu comment calculer la vitesse en fonction de la position dans tous les cas.

"Equation différentielle de la vitesse" :

$\bar{v}_B = R\,\dot{\theta}$

($\bar{v}_B = \left\|\vec{v}_B\right\|$ *car* $\dot{\theta} \geq 0$ *: par expérience, la bille va vers le sol donc θ ne cesse d'augmenter)*

On peut donc écrire : $\frac{d\bar{v}_B}{dt} = R\,\ddot{\theta}$ *d'où* $\frac{d\bar{v}_B}{dt} - g_0\sin\theta = \frac{d\bar{v}_B}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} - g_0\sin\theta = 0$

Or $\dot{\theta} = \frac{\bar{v}_B}{R}$ *d'où* $\bar{v}_B\,\frac{d\bar{v}_B}{d\theta} - R\,g_0\sin\theta = 0$.

Intégration par séparation des variables

on intègre $\bar{v}_B\,d\bar{v}_B = R\,g_0\sin\theta\,d\theta$ *:* $\int \bar{v}_B\,d\bar{v}_B = R\,g_0\int\sin\theta\,d\theta$

ce qui donne $\frac{1}{2}\bar{v}_B{}^2 + Cte = -R\ g_0\ \cos\theta + Cte$

D'où $\|\vec{v}_B\| = +\sqrt{C - 2\ R\ g_0\ \cos\theta}$ *où C est une constante d'intégration que l'on détermine avec les conditions initiales.*
(attention : on doit obtenir $C \geq 2\ R\ g_0\ \cos\theta$ *)*

Conditions Initiales. A t = 0, B est au point S sans vitesse initiale : $\theta(t=0) = 0$ *et* $v(t=0) = 0$ *.*
Ce qui se traduit par : $0 = \sqrt{C - 2\ R\ g_0}$ *et donc* $C = 2\ R\ g_0$ *(on a bien* $C \geq 2\ R\ g_0\ \cos\theta$*)*
D'ou la solution : $\|\vec{v}_B\| = \sqrt{2\ R\ g_0\ (1 - \cos\theta)}$

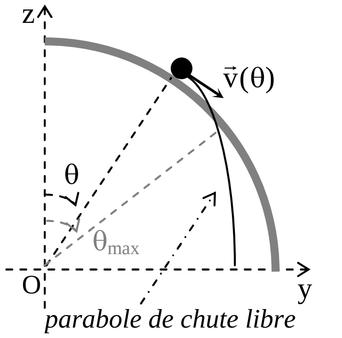
2- <u>*Condition de décollage*</u> *: Si B n'est plus en contact avec la butte, alors la réaction* $\vec{R}_B$ *de la butte est nulle.*
Il nous faut donc évaluer $\vec{R}_B = \|\vec{R}_B\|\,\vec{u}_r$ *, ce que l'on peut faire à l'aide de la première équation obtenue par projection du PFD :* $-m\ g_0\ \cos\theta + \|\vec{R}_B\| = -m\ R\ \dot{\theta}^2$. *Comme* $\dot{\theta} = \frac{\bar{v}_B}{R}$ *et* $\|\vec{v}_B\| = \bar{v}_B = \sqrt{2\ R\ g_0\ (1 - \cos\ \theta)}$ *,*
on a : $\|\vec{R}_B\| = m\ g_0\ \cos\theta - m\ \frac{\bar{v}_B{}^2}{R} = m\ g_0\ \cos\theta - 2\ m\ g_0\ (1 - \cos\theta)$

D'où la solution $\|\vec{R}_B\| = m\ g_0\ (3\cos\theta - 2)$

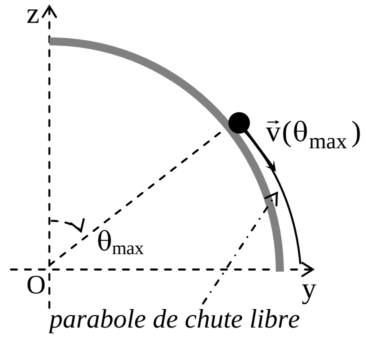
Or $\|\vec{R}_B\|$ *doit rester positive; lorsqu'elle s'annule, la bille décolle pour une valeur de* $\theta = \theta_{max}$*. Ce qui se traduit par la condition* $m\ g_0\ (3\cos\theta_{max} - 2) = 0$ *. On trouve* $\cos\theta_{max} = \frac{2}{3}$ *et* $\theta_{max} = 48°$*.*

Après décollage, la bille a un mouvement de chute libre parabolique avec une vitesse initiale $\vec{v}_B = \sqrt{\frac{1}{3}\ R\ g_0}\ \vec{u}_r(\theta_{max})$ *.*

<u>*Remarque*</u> *: Si en un point* M_1 *tel que* $\theta_1 < \theta_{max}$ *, on trace la trajectoire qu'aurait la bille en chute libre à partir de* M_1 *(comme si la butte s'interrompait brutalement en* M_1*) .*
La vitesse initiale serait $\vec{v}_B = \sqrt{2\ R\ g_0\ (1 - \cos\theta_1)}\ \vec{u}_r(\theta_1)$ *: cette trajectoire serait "à l'intérieur" de la butte! C'est ce qui explique que la "bille appuie sur la butte" (qui réagit par* $\vec{R}_B$*).*
Par contre, à partir de θ_{max}*, cette trajectoire est "en dehors" de la butte : la "bille n'appuie plus sur la butte", la réaction de la butte est nulle, la bille a décollé.*



parabole de chute libre



parabole de chute libre

3.3** *Exercice de tronc commun*
Un projectile ponctuel de masse m est lancé à partir du sol avec une vitesse initiale de module v_0 et dont la direction fait un angle θ avec l'horizontale. Il est soumis à une force de résistance de l'air $\vec{F} = -k\vec{v}$.
1- Etablir les équations différentielles du mouvement.

2- En déduire les expressions des composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse. Etablir l'expression de la vitesse limite de chute dans l'air ?

3- En déduire les équations du mouvement x(t) et y(t). Dessiner l'allure de la trajectoire.

Question supplémentaire (application) : un homme qui tombe en chute libre atteint une vitesse limite d'environ 200km/h. Estimer la valeur (approximative) du coefficient de frottement.

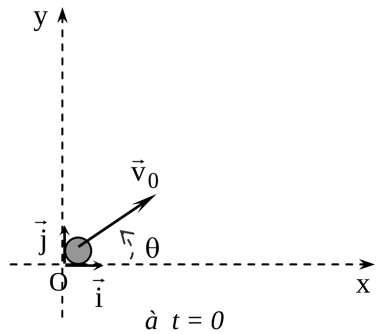
1-

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Système : Le projectile M de masse m constante.

Repère : $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *; coordonnées cartésiennes*

Mouvement du centre d'inertie de M :



à t = 0

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \qquad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$$

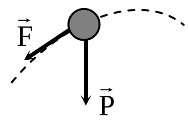
Il y a deux inconnues pour le mouvement, x(t) et y(t).

Forces extérieures :

Forces à distance : Poids de M $\quad \vec{P} = -m\,g_0\,\vec{j}$

Forces de contact : Frottements avec l'air $\quad \vec{F} = -k\vec{v} = -k(\dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j})$

La seule inconnue qui apparaît dans le bilan de forces, est la vitesse de M.



à t

PFD : dans un repère galiléen et pour un système de masse constante il s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext. au syst.}} = m_{\text{syst.}}\,\vec{\gamma}_{\text{syst.}}$$

Soit $\quad \vec{P} + \vec{F} = m\vec{\gamma} \qquad$ *c'est à dire :* $\quad -m\,g_0\,\vec{j} - k(\dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}) = m(\ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j})$

Projection // à Ox: $\quad -k\,\dot{x} = m\,\ddot{x} \qquad$ *Projection // à Oy:* $\quad -m\,g_0 - k\,\dot{y} = m\,\ddot{y}$

Les équations différentielles du mouvement sont donc :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{k}{m}\dot{x} + \ddot{x} \\ -g_0 = \dfrac{k}{m}\dot{y} + \ddot{y} \end{cases}$$

2- *Il est commode pour les résoudre de passer par la vitesse* $\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$ *, sachant que* $\vec{\gamma} = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\vec{j}$

Ces équations s'écrivent alors :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{k}{m}v_x + \dot{v}_x & (1) \\ -g_0 = \dfrac{k}{m}v_y + \dot{v}_y & (2) \end{cases}$$

Résolution :

- *solution générale de l'équation (1) :* $v_x = A_x\,e^{-\frac{k}{m}t}$
- *solution de l'équation (2) sans second membre (* $0 = \dfrac{k}{m}v_y + \dot{v}_y$ *) :* $v_{y,ssm} = A_y\,e^{-\frac{k}{m}t}$

solution particulière de l'équation (2) complète :

on essaie v_{yp} *= cte :* $-g_0 = \dfrac{k}{m}v_{yp} + 0$ *; d'où* $v_{yp} = -\dfrac{m}{k}g_0$

solution générale de l'équation (2) complète : $v_y = v_{y,ssm} + v_{yp} = A_y\,e^{-\frac{k}{m}t} - \dfrac{m}{k}g_0$

A_x *et* A_y *sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions initiales :*

$\vec{v}(t=0) = v_0\cos\theta\,\vec{i} + v_0\sin\theta\,\vec{j} \qquad$ *donc* $\quad v_y(t=0) = v_0 \sin\theta \qquad$ *et* $\qquad v_x(t=0) = v_0 \cos\theta$

d'où :

$$\begin{cases} v_0\sin\theta = A_y - \dfrac{m}{k}g_0 \\ v_0\cos\theta = A_x \end{cases} \qquad \textit{donc} \qquad A_y = v_0\sin\theta + \frac{m}{k}g_0$$

Les équations horaires de la vitesse sont donc : $v_x(t) \begin{cases} = v_0 \cos\theta \, e^{-\frac{k}{m}t} \\ v_y(t) = (v_0 \sin\theta + \frac{m}{k} g_0)\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k} g_0 \end{cases}$

<u>Vitesse limite</u> :
On s'aperçoit que lorsque $t \to +\infty$ $\quad v_x \to 0$ *et* $\quad v_y \to -m\, g_0 / k = cte$
La vitesse tend à devenir verticale et constante de norme : $v_{lim} = -m\, g_0 / k$

3- *Pour obtenir les équations horaires du mouvement, il suffit d'intégrer les équations horaires de la vitesse :*

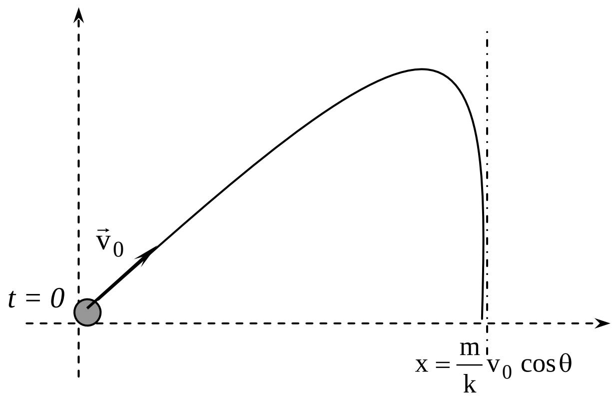
$$\begin{cases} x(t) = \int v_0 \cos\theta \, e^{-\frac{k}{m}t} \, dt = -\frac{m}{k} v_0 \cos\theta \, e^{-\frac{k}{m}t} + C_x \\ y(t) = \int \left((v_0 \sin\theta + \frac{m}{k} g_0)\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k} g_0 \right) dt = -\frac{m}{k} (v_0 \sin\theta + \frac{m}{k} g_0)\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k} g_0 \, t + C_y \end{cases}$$

Les constantes d'intégration C_x *et* C_y *sont calculées par les conditions initiales :*
$x(t=0) = 0$ *et* $y(t=0) = 0$.

Ce qui donne : $C_x = \frac{m}{k} v_0 \cos\theta$

et $\quad C_y = \frac{m}{k} (v_0 \sin\theta + \frac{m}{k} g_0)$

La trajectoire tend vers une asymptote verticale.



Question supplémentaire : *Un homme qui tombe en chute libre atteint une vitesse limite d'environ 200km/h .*
Or nous avons montré que $v_{lim} = -m\, g_0 / k$ *. Donc pour un homme de poids 80kg,*
on trouve $k = m\, g_0 / v_{lim} = 80 \times 9{,}8 / 56 = 14$ *S.I.*

5** On laisse tomber une bille sphérique de masse volumique ρ_B et de rayon a, dans un tube vertical contenant un liquide de masse volumique ρ_L. Le liquide étant visqueux, la bille sera freinée par l'action d'une force de frottement visqueux dont l'expression est donnée par la loi de Stokes : $\vec{F} = -\eta\phi\vec{v}$, où η est le coefficient de viscosité du liquide et Φ est le facteur de forme : $\Phi = 6\pi a$ pour une sphère.

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement en mettant bien en évidence chaque étape du raisonnement. Montrer que l'on peut l'écrire sous la forme $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \kappa$, en explicitant τ et κ en fonction de ρ_B, ρ_L, a, η et g.

2- Quelles sont les unités de la viscosité η, de τ et de κ? (vérifier la cohérence dimensionnelle des résultats).

3- τ est appelé temps caractéristique d'établissement du régime permanent. Justifier ce nom, puis déterminer la vitesse limite de chute de la bille en régime permanent.

4- Application numérique pour le cas de la chute d'un grain de poussière dans l'air, sachant qu'un grain de poussière a un diamètre d'environ 10^{-2} mm, une masse volumique d'environ 2 g.cm^{-3}, et que la viscosité de l'air est 1,8 10^{-5} S.I.

Question supplémentaire : étudier le régime transitoire.

1- *<u>Référentiel</u> terrestre galiléen.*

<u>Repère</u> $R(O,\vec{k})$

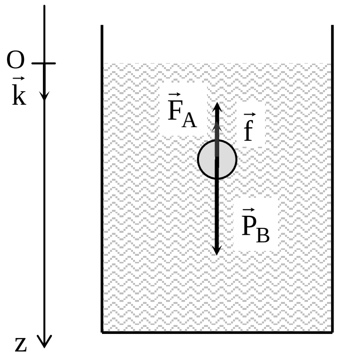
<u>Système</u> la bille B de masse $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_B$

<u>Mouvement</u> rectiligne vertical

$\overrightarrow{OB} = z\,\vec{k}$

$\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = \dot{z}\,\vec{k}$

$\vec{\gamma}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \ddot{z}\,\vec{k}$



<u>Forces extérieures</u>

- A distance : poids de B $\vec{P}_B = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_B\, g_0\,\vec{k}$

- De contact avec l'air :

- force d'Archimède $\vec{F}_A = -m_{\text{fluide déplacé}}\; g_0\,\vec{k} = -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_L\, g_0\,\vec{k}$, *la bille étant totalement immergée.*

(la force d'Archimède correspond à la résultante des forces de pression (forces normales) exercées par le liquide sur B)

- force de frottements visqueux avec le liquide (force tangentielle) $\vec{f} = -6\pi a \eta \vec{v}_B = -6\pi a \eta \dot{z}\,\vec{k}$

<u>PFD</u> $\vec{P}_B + \vec{F}_A + \vec{f} = m\vec{\gamma}_B$

projection sur Oz $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_B\, g_0 - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_L\, g_0 - 6\pi a \eta \dot{z} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_B\, \ddot{z}$

<u>Equation différentielle du mouvement</u> $\ddot{z} + \frac{9}{2}\frac{\eta}{a^2\rho_B}\dot{z} = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right)g_0$

Or $\dot{z} = \bar{v}_B$ *et* $\ddot{z} = \bar{\gamma}_B = \dot{\bar{v}}_B$ *d'où*

<u>Equation différentielle pour la vitesse</u> $\dot{\bar{v}}_B + \frac{9}{2}\frac{\eta}{a^2\rho_B}\bar{v}_B = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right)g_0$

Cette équation est du type $\dot{\bar{v}}_B + \frac{1}{\tau}\bar{v}_B = \kappa$ *où* $\tau = \frac{2}{9}\frac{a^2\rho_B}{\eta}$ *et* $\kappa = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right)g_0$

2- $\vec{f} = -6\pi a \eta \vec{v}_B$ *d'où* $[\eta] = \frac{[\vec{f}]}{[\vec{v}_B][a]} = \frac{[M\,L\,T^{-2}]}{[L\,T^{-1}][L]} = [M\,L^{-1}\,T^{-1}]$. *Unité S.I. : kg m^{-1} s^{-1}*

$\kappa = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right)g_0$ *d'où* $[\kappa] = [g_0] = [L\,T^{-2}]$. *κ a la dimension d'une accélération. Unité S.I. : m s^{-2}*

$\tau = \dfrac{2}{9}\dfrac{a^2 \rho_B}{\eta}$ *d'où* $[\tau] = \dfrac{[a]^2 [\rho_B]}{[\eta]} = \dfrac{[L^2][M L^{-3}]}{[M L^{-1} T^{-1}]} = [T]$. *τ a la dimension d'un temps. Unité S.I. : s*

3- *Au départ* $\vec{v}_B = \vec{0}$, *donc la force de frottement* $\vec{f} = \vec{0}$ *à t = 0.*

Ensuite, sous l'action de la force constante $\vec{P}_B + \vec{F}_A$, $\vec{v}_B$ *augmente et donc* $\vec{f}$ *augmente également jusqu'à ce que* $\vec{f}$ *équilibre* $\vec{P}_B + \vec{F}_A$. *Alors la vitesse ne peut plus augmenter (*$\vec{\gamma}_B = \vec{0}$*); elle a atteint une valeur limite* $\vec{v}_{limite}$.

- *Le régime permanent est celui pour lequel* $\vec{v}_B(t) = \vec{v}_{limite}$
- *Le régime transitoire précède le régime permanent :* $\vec{v}_B(t) < \vec{v}_{limite}$
- *τ s'appelle le temps caractéristique d'établissement du régime permanent. C'est une mesure temporelle standard qui permet d'avoir une idée de la durée d'établissement du régime permanent (cf d-).*

<u>Calcul de</u> $\vec{v}_{limite}$ *:* $\vec{v}_{limite}$ *est tel que* $\vec{P}_B + \vec{F}_A + \vec{f} = \vec{0}$ *donc* $\vec{\gamma}_B = \vec{0} = \dfrac{d\vec{v}_{B\,lim}}{dt}$.

On a donc $\dot{\vec{v}}_{B\,lim} + \dfrac{1}{\tau}\vec{v}_{B\,lim} = \vec{\kappa}$. *Comme* $\dot{\vec{v}}_{B\,lim} = 0$, $\vec{v}_{B\,lim} = \vec{\kappa}\,\tau$

4- *Application numérique pour un grain de poussière dans l'air.*

a = 5 10^{-6} m η = 1,8 10^{-5} S.I. ρ_B = 2 10^3 kg m $^{-3}$ g_0 = 9,8 m s^{-2} et ρ_L = 1,2 10^3 kg m $^{-3}$

On trouve τ = 0,62 10^{-4} s ; $\kappa \approx g_0$ car $\rho_L << \rho_c$; $v_{limite} \approx$ 6,1 cm s^{-1}

Question supplémentaire *: Etude du régime transitoire :* $\dot{\vec{v}}_B + \dfrac{1}{\tau}\vec{v}_B = \vec{\kappa}$

<u>Résolution</u>

1- Equation sans 2nd membre $\dot{\vec{v}}_B + \dfrac{1}{\tau}\vec{v}_B = 0$ *Solution* $\vec{v}_{B\,ssm} = \vec{A}\, e^{-t/\tau}$

2- Solution particulière de $\dot{\vec{v}}_B + \dfrac{1}{\tau}\vec{v}_B = \vec{\kappa}$. *On essaie une constante* $\vec{v}_{B\,part} = \text{cte}$, *donc* $\dot{\vec{v}}_{B\,part} = 0$.

On trouve $\vec{v}_{B\,part} = \vec{\kappa}\,\tau = \vec{v}_{B\,lim}$.

3- Solution générale de $\dot{\vec{v}}_B + \dfrac{1}{\tau}\vec{v}_B = \vec{\kappa}$ *:* $\vec{v}_B(t) = \vec{v}_{B\,ssm} + \vec{v}_{B\,part} = \vec{A}\, e^{-t/\tau} + \vec{v}_{B\,lim}$

4- Détermination de la constante d'intégration A avec la condition initiale.

C.I. : à t = 0 $\vec{v}_B(t=0) = \vec{0}$

D'où $0 = \vec{A} + \vec{v}_{B\,lim}$ *et on trouve* $\vec{A} = \vec{v}_{B\,lim}$

<u>Solution</u> *:* $\vec{v}_B(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\vec{v}_{B\,lim} = \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\vec{\kappa}\,\tau$

La vitesse va augmenter de façon exponentielle et tend vers la vitesse limite, lorsque t tend vers l'infini.

<u>Question</u> : quand le régime permanent est il atteint ?

- *Théoriquement jamais!*
- *En pratique, c'est une question de précision. Effectuons une application numérique :*

<u>A.N.</u> *à t = τ* $\vec{v}_B(\tau) = \left(1 - e^{-1}\right)\vec{v}_{limite} = 0{,}63\,\vec{v}_{limite}$

à t = 2τ $\vec{v}_B(2\tau) = \left(1 - e^{-2}\right)\vec{v}_{limite} = 0{,}86\,\vec{v}_{limite}$

à t = 5τ $\vec{v}_B(5\tau) = \left(1 - e^{-5}\right)\vec{v}_{limite} = 0{,}99\,\vec{v}_{limite}$

Le régime permanent est donc "atteint" pour t > 5τ (à 1% près sur la vitesse).

(Il est "atteint" pour t > 2τ à 15% près)

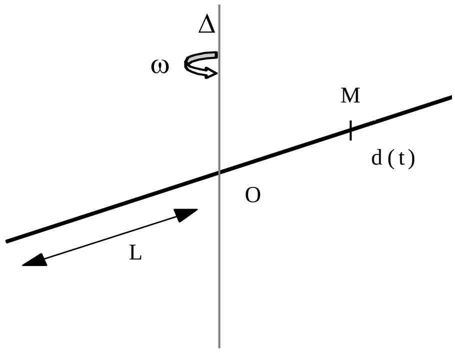
3.6** Exercice de tronc commun

Un tube rectiligne tourne dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical Δ passant par son centre. A l'instant t=0 on lâche un point matériel à la distance d_O de l'axe, ce point glisse sans frottements à l'intérieur du tube. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1- exprimer d(t), distance entre le point et l'axe au cours du temps.

2- exprimer la réaction du tube, en module et direction.

3- représenter la trajectoire du point une fois éjecté du tube de longueur 2L. Montrer que l'angle de sortie est indépendant de ω.



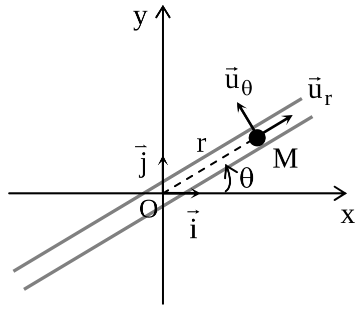
1-

<u>Référentiel</u> : terrestre supposé galiléen.

<u>Système</u> : Le point matériel M de masse m constante.

<u>Repère</u> : $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Remarques sur le mouvement : M se déplace à l'intérieur du tube, qui est lui même en rotation uniforme autour de l'axe Δ vertical. La vitesse angulaire de M est donc celle du tube, ω, qui est constante. Il est donc commode de travailler dans un système de coordonnées polaires, dans le plan horizontal.



Plan horizontal

<u>Mouvement de M</u> :

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ *la coordonnée polaire r mesure la position d de M dans le tube, à partir de O.*

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta \quad \textit{car } \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\omega\vec{u}_\theta + \dot{r}\omega\vec{u}_\theta + r\omega\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta \quad \textit{car } \omega \textit{ est constant.}$$

(Rappel : $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$ *)*

En intégrant l'équation $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ *, on peut calculer directement* $\theta(t) = \omega t + \theta_0 = \omega t$ *si l'on choisi l'axe Ox tel que* $\theta(t=0) = 0$*. La seule inconnue du mouvement est donc r(t).*

<u>Forces extérieures</u> :

Forces à distance : Poids de M $\vec{P} = -m g_0 \vec{k}$

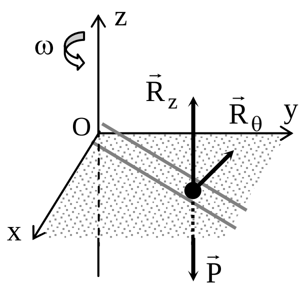
Forces de contact

- Réaction normale du tube : elle est perpendiculaire au tube donc elle n'a pas de composante le long du tube, c'est à dire suivant $\vec{u}_r$ *.*

La composante R_r *est nulle, donc* $\vec{R} = R_z\,\vec{k} + R_\theta\,\vec{u}_\theta$ *. On ne peut rien affirmer de plus, à part qu'il est raisonnable de penser que* R_z *est dirigée vers le haut (le tube empêche M de tomber).*

- On néglige tout frottement.

Les inconnues du point de vue des forces sont R_z *et* R_θ *.*



<u>PFD</u> : dans un repère galiléen et pour un système de masse constante il s'écrit : $\sum \vec{F}_{ext.\,au\,syst.} = m_{syst.}\,\vec{\gamma}_{syst.}$

$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$ *c'est à dire :* $-m g_0\,\vec{k} + R_z\,\vec{k} + R_\theta\,\vec{u}_\theta = m((\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta)$

Projection // à $\vec{u}_r$ *:* $0 = m(\ddot{r} - r\omega^2)$ *(1)*

Projection // à $\vec{u}_\theta$ *:* $R_\theta = m2\dot{r}\omega$ *(2)*

Projection // à $\vec{k}$ *:* $-m g_0 + R_z = 0$ *(3)*

<u>Remarques</u>

- Si l'on avait oublié le terme R_θ*, , l'équation (2) donnerait alors* $\dot{r} = 0$*, c'est à dire r = cte : ce qui veut dire que M resterait immobile par rapport au tube, quelles que soient les conditions, ce qui n'est pas vraisemblable.*

- L'équation (1) donne l'équation différentielle du mouvement en r(t) : $\ddot{r} - r\,\omega^2 = 0$

<u>*Résolution*</u> *de* $\ddot{r} - r\,\omega^2 = 0$

1- solution générale $r(t) = A\,e^{-\omega t} + B\,e^{+\omega t}$ *où A et B sont des constantes d'intégration*

2- détermination de A et B par les conditions initiales.

C.I. : on lâche M à la distance d_0 de l'axe : r(t=0) = d_0 *et* $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$

Or à l'instant t=0, M n'est pas immobile puisqu'il est entraîné par la rotation du tube. Il a un mouvement circulaire et donc sa vitesse est orthoradiale (// à $\vec{u}_\theta$) . Sa vitesse radiale, c'est à dire le long du tube (// à $\vec{u}_r$), est donc nulle. Le vecteur vitesse s'écrit de façon générale $\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\omega\,\vec{u}_\theta$. *On a donc :*

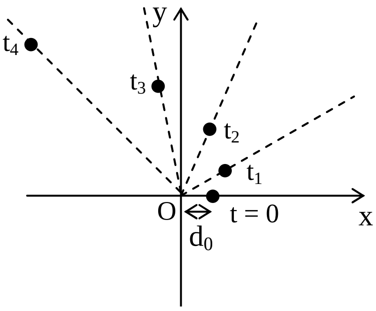
- $\vec{v}(t=0)$ *est orthoradiale :* $\vec{v}(t=0) = d_0\,\omega\;\vec{u}_\theta(t=0)$.
- *On en déduit que* $\dot{r}\,(t=0) = 0$.

D'où : $d_0 = A + B$

et comme $\dot{r}(t) = -\,\omega\,A\,e^{-\omega t} + \omega\,B\,e^{+\omega t}$ *on a* $0 = (B - A)\,\omega$

Donc $A = B = d_0/2$

- Solution : $d(t) = r(t) = \dfrac{d_0}{2}\,(e^{-\omega t} + e^{+\omega t})$



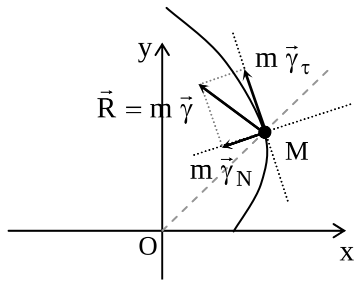
Plan horizontal

<u>*Analyse du résultat*</u>*. d augmente avec le temps, donc M a un mouvement en spirale vers l'extérieur : M sera finalement éjecté du tube.*

2- *On reprend les équations (2) et (3) :*
$$\begin{cases} R_\theta = m\,2\,\dot{r}\,\omega & (2) \\ -\,m\,g_0 + R_z = 0 & (3) \end{cases}$$

On trouve donc
$$\vec{R} = R_\theta\,\vec{u}_\theta + R_z\,\vec{u}_z = m\,2\,\dot{r}\,\omega\,\vec{u}_\theta + m\,g_0\,\vec{u}_z = m\,\omega^2 d_0 (e^{+\omega t} - e^{-\omega t})\,\vec{u}_\theta + m\,g_0\,\vec{u}_z$$
$$\left\|\vec{R}\right\| = \sqrt{{R_\theta}^2 + {R_z}^2} = m\sqrt{\omega^4 {d_0}^2 (e^{+\omega t} - e^{-\omega t})^2 + {g_0}^2}$$

<u>*Remarque*</u> *: la composante R_θ , orientée dans le sens de la rotation, manifeste l'action du tube sur M. Cette force est responsable du mouvement :* $\vec{P} + R_z\,\vec{k} + R_\theta\,\vec{u}_\theta = R_\theta\,\vec{u}_\theta = m\,\vec{\gamma}$. *Si cette force n'existait pas, le mouvement de M serait rectiligne uniforme dans la direction de $\vec{\gamma}_\tau$ (c'est ce qui se passe lorsque la bille arrive au bout du tube) : on voit sur le dessin que la coordonnée r de M augmenterait dans ce cas. La force R_θ oblige M à rester dans le tube, et donc incurve la trajectoire, mais elle ne peut empêcher M de "partir vers l'extérieur" (i.e. r augmente).*



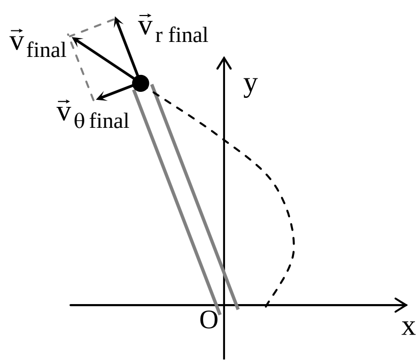
Plan horizontal

En terme d'accélération, on a donc une accélération orthoradiale (suivant $\vec{u}_\theta$). (Attention, bien que $\ddot{r}(t) \neq 0$, la composante radiale de l'accélération (suivant $\vec{u}_r$) est nulle car $\gamma_r = \ddot{r} - r\,\omega^2 = 0$).

L'accélération orthoradiale se décompose en une composante tangentielle (orientée dans le sens de la vitesse, car le module de la vitesse augmente) et une composante normale qui incurve la trajectoire.

3- *M arrive au bout du tube à l'instant t_{final}, lorsque* $d(t_{final}) = L = \dfrac{d_0}{2}\,(e^{-\omega t_{final}} + e^{+\omega t_{final}})$. *La vitesse est alors :*
$$\vec{v}(t_{final}) = \dot{r}(t_{final})\,\vec{u}_r + d_0\,\omega\,\vec{u}_\theta = d_0\,\omega\left[\frac{e^{+\omega t_{final}} - e^{-\omega t_{final}}}{2}\,\vec{u}_r + \vec{u}_\theta\right]$$

L'angle de sortie φ est tel que:
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{v_\theta(t_{final})}{v_r(t_{final})} = \frac{2}{e^{+\omega t_{final}} - e^{-\omega t_{final}}}$$

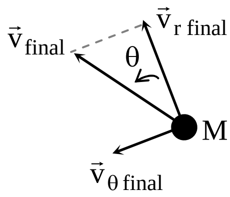


Plan horizontal

Calcul de $\dfrac{e^{+\omega t_{final}} - e^{-\omega t_{final}}}{2}$ *en fonction de* $\dfrac{e^{+\omega t_{final}} + e^{-\omega t_{final}}}{2} = \dfrac{L}{d_0}$.

Si l'on connaît les fonctions hyperboliques, c'est simple. Sinon, il faut montrer que :

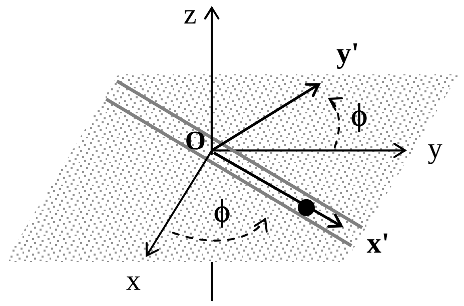
$$\left(\frac{e^{+\omega t_{final}} - e^{-\omega t_{final}}}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{e^{+\omega t_{final}} + e^{-\omega t_{final}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{L^2}{d_0{}^2}$$



D'où : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{d_0}{\sqrt{d_0{}^2 - L^2}}$. *$\varphi$ est bien indépendant de ω.*

QUESTION SUBSIDIAIRE : On peut traiter ce problème en raisonnant dans le référentiel tournant (non-galiléen) lié au tube : essayez (après le cours sur les changements de référentiels).

Soit un référentiel R'(O,x',y',z) lié au tube. Pour traiter le problème dans ce référentiel tournant, donc non galiléen, il nous faut écrire le mouvement d'entraînement de ce référentiel R' dans le référentiel R terrestre galiléen : le centre O de R' est celui de R; les axes Ox' et Oy' tournent à vitesse angulaire constante ω par rapport aux axes Ox et Oy de R; l'axe Oz est le même. L'entraînement est donc décrit par le vecteur vitesse angulaire d'entraînement $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, *qui est constant.*



On peut donc exprimer $\vec{\gamma}_a$ *l'accélération absolue de M dans R, en fonction de* $\vec{\gamma}_r$ *l'accélération relative de M dans R' de la manière suivante :* $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) + 2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$, *où* $\vec{v}_r$ *est la vitesse relative de M dans R'.*

<u>PFD :</u>

Dans R, le PFD s'écrit : $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{\gamma}_a$.

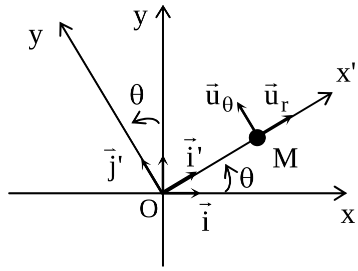
Dans R' on écrira donc : $\vec{P} + \vec{R} - m\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) - 2\,m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = m\,\vec{\gamma}_r$, *en faisant basculer les deux termes d'inertie d'entraînement* $m\,\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM})$ *et complémentaire* $2\,m\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$ *(Coriolis) du côté des forces.*

<u>Mouvement dans R'</u> :

$\overrightarrow{OM} = x'\,\vec{i}'$ $\quad \vec{v}_r = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/R'} = \dot{x}'\,\vec{i}'$ *et* $\vec{\gamma}_r = \dfrac{d\vec{v}_r}{dt/R'} = \ddot{x}'\,\vec{i}'$

Remarques :

- *la coordonnée polaire r utilisée dans R, correspond à x' : x' = r*
  (de même : $\vec{u}_r = \vec{i}'$ *et* $\vec{u}_\theta = \vec{j}'$*)*
- *attention* $\vec{i}'$ *est immobile dans R'.*



Plan horizontal

<u>Calcul des termes d'inertie dans R'</u> :

$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}) = \omega^2\ x'\,(\vec{k}\wedge(\vec{k}\wedge\vec{i}')) = \omega^2\ x'\,(\vec{k}\wedge\vec{j}') = -\omega^2\ x'\,\vec{i}'$

$2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2\,\omega\,\dot{x}'\,(\vec{k}\wedge\vec{i}') = 2\,\omega\,\dot{x}'\,\vec{j}'$

(remarque : $\vec{k}\wedge\vec{i}' = \vec{j}'$ *et* $\vec{k}\wedge\vec{j}' = -\,\vec{i}'$*)*

<u>Ecriture des forces dans R'</u> :

$\vec{P} = -m\,g_0\,\vec{k}$ *et* $\vec{R} = R_{y'}\,\vec{j}' + R_z\,\vec{k}$

<u>Réécriture du PFD dans R'</u> : $-\,m\,g_0\,\vec{k} + R_z\,\vec{k} + R_{y'}\,\vec{j}' + m\,\omega^2\ x'\,\vec{i}' - 2\,m\,\omega\,\dot{x}'\,\vec{j}' = m\,\ddot{x}'\,\vec{i}'$

projection suivant Ox' : $m\,\omega^2\ x' = m\,\ddot{x}'$ *(1)*

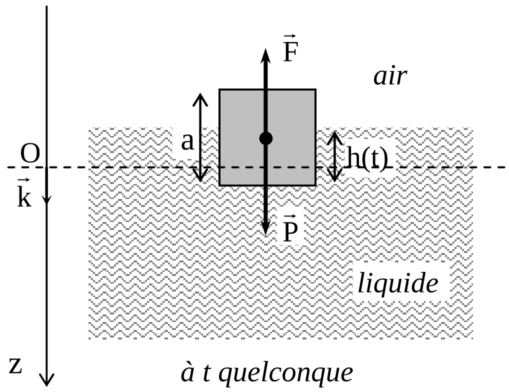
projection suivant Oy' : $R_{y'} - 2\,m\,\omega\,\dot{x}' = 0$ *(2)*

projection suivant Oz : $-\,m\,g_0 + R_z = 0$ *(3)*

Résolution ….
Les équations sont similaires à celles obtenues dans le référentiel galiléen R, d'autant plus que les vecteurs polaires dans R sont en relation directe avec les vecteurs cartésiens de R' : $\vec{u}_r = \vec{i}'$ *et* $\vec{u}_\theta = \vec{j}'$*. De la même manière on a r = x' .*
La résolution de l'équation différentielle du mouvement (1) donne x'(t)= d(t).
etc…

3.7*** Un cube de côté a, de masse volumique ρ_C, flotte en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_L. Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas, gardant toujours sa face inférieure horizontale. On ne prend pas en compte la pression de l'air, ni les frottements visqueux avec le fluide. On choisi un repère dont l'origine se situe au niveau de la base du cube lorsqu'il est à l'équilibre dans le fluide. A l'instant t=0, on enfonce le cube dans le fluide (hauteur de cube immergée = h_0) et on le lâche sans vitesse initiale.

a- Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas où $h_0 < a$.
b- En déduire l'équation du mouvement du cube en fonction du temps. Préciser la période des oscillations.
c- Quelle doit être la valeur de h_0 pour que le cube puisse bondir hors du liquide?



Remarque : la situation d'équilibre a déjà été traitée (ex13 partie 1). On retrouve la hauteur immergée à l'équilibre $h_e = \frac{\rho_c}{\rho_L} a$ *(attention au changement de l'axe vertical)*

Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Repère : $R(O, \vec{k})$

Système : Le cube de centre d'inertie G, de masse $\rho_c\ a^3$ constante. Le cube est ramené à un point matériel G. (Le mouvement de G est le même que celui de la base du cube)

Mouvement : rectiligne vertical

$$\overrightarrow{OG} = \left(z_{base}(t) + \frac{a}{2} \right) \vec{k}$$

à t = 0 la base est à $z_{baze} = z_0$, à la hauteur h_0 de la surface. De plus, la surface est à h_e de O (z=0).
Donc $z_{base}(t=0) = z_0 = h_0 - h_e$

à t quelconque, on peut écrire de façon similaire $z_{base}(t) = h(t) - h_e$ et $\overrightarrow{OG} = \left(h(t) + \frac{a}{2} - h_e \right) \vec{k}$

$$\vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \dot{z}_{base}\ \vec{k} = \dot{h}\ \vec{k}$$ *Remarque : la vitesse de G est la même que celle de la base.*

$$\vec{\gamma}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \ddot{z}_{base}\ \vec{k} = \ddot{h}\ \vec{k}$$ *idem pour l'accélération.*

Forces :

- *Force d'Archimède exercée sur le cube* $\vec{F}_a = -a^2\ h\ \rho_L\ g_0\ \vec{k}$ *($h(t) \leq a$).*
- *Poids du cube* $\vec{P} = +\rho_c\ a^3\ g_0\ \vec{k}$

PFD : $\vec{P} + \vec{F}_a = \rho_c\ a^3\ \vec{\gamma}_G$

En projetant sur Oz : $(-\ h\ \rho_L + \rho_c\ a)\ g_0 = \rho_c\ a\ \ddot{z}$ *où $h = z_{base} + h_e$*

D'où : $\ddot{z}_{base} + \frac{\rho_L}{\rho_c} \frac{g_0}{a} z_{base} = \rho_c\ a - \rho_L\ h_e = 0$ *(car* $h_e = \frac{\rho_c}{\rho_L} a$ *)*

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ddot{z}_{base} + \frac{\rho_L}{\rho_c} \frac{g_0}{a} z_{base} = 0$

b- *L'équation peut s'écrire :* $\ddot{z}_{base} + \omega^2\ z_{base} = 0$ *où* $\omega^2 = \frac{\rho_L}{\rho_c} \frac{g_0}{a}$

Solution générale : $z_{base} = A \cos(\omega t + \phi)$
où A et ϕ sont des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions initiales.

Conditions Initiales

On lâche le cube en $h(t=0)=h_0$ sans vitesse initiale :

$z_{base}(t=0) = z_0 = h_0 - h_e$ *et* $\vec{v}_G(t=0) = \dot{z}_{base}(t=0)\,\vec{k} = \vec{0}$ *donc* $\dot{z}_{base}(t=0) = 0$

Or à t quelconque $\dot{z}_{base}(t) = -A\,\omega\sin(\omega t + \phi)$

d'où : $h_0 - h_e = A\cos(\phi)$

et $0 = -A\,\omega\,\sin(\phi)$ *ce qui donne* $\phi = 0$ *et* $A = h_0 - h_e$

<u>*Résultat*</u> *:* $z_{base} = (h_0 - h_e)\cos(\omega t)$ *c'est à dire* $z_{base} = \left(h_0 - \frac{\rho_c}{\rho_L}a\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_c}\frac{g_0}{a}}\,t\right)$

C'est un mouvement oscillatoire harmonique.

La période des oscillations est $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_L}\frac{a}{g_0}}$

z_{base} *oscille entre* $-h_0 + \frac{\rho_c}{\rho_L}a$ *et* $h_0 - \frac{\rho_c}{\rho_L}a$.

c- *Le cube bondit hors de l'eau si la base du cube atteint la surface de l'eau, c'est à dire si la valeur minimale de* z_{base} *vaut* $-h_e$.

Ce qui s'écrit $-h_0 + \frac{\rho_c}{\rho_L}a = -h_e = -\frac{\rho_c}{\rho_L}a$ *, d'où la condition :* $h_0 = 2\frac{\rho_c}{\rho_L}a$

<u>*Vérification*</u> *: avec la condition* $h_0 < a$ *, ce résultat implique que* $2\frac{\rho_c}{\rho_L} < 1$ *, c'est à dire* $\rho_c < \frac{\rho_L}{2}$ *. La masse volumique du cube doit donc être inférieure à celle du liquide, ce qui est cohérent puisque le cube flotte.*